Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie.
Promotion: 1^{ière} année Science de la Terre et d'Univers.
Corrigé type de l'examen en mathématique 1, 2023 -2024.

- Exercice 1

Soit la fonction polynôme $p(x)$ définie par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

1. Les racines simples (entiers) de $p(x)$:
$a_0 = 8 \Longrightarrow D_8 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

$$p(1) = 0 \text{.....(01point)}$$

Donc 1 est une racine simple (entier) de $p(x)$
En déduire une factorisation de $p(x)$:

$$p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = (x-1)(x^2 - 2x - 8) \text{.....(01point)}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $p(x) = 0$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x-1) = 0 \text{ ou} \\ (x^2 - 2x - 8) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x = 1) \text{ ou} \\ (x = 4) \text{ ou} (x = -2) \end{array} \right. \\ S &= \{-2, 1, 4\} \text{.....(02point)} \end{aligned}$$

- Exercice 02

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $|2x^2 + 2x + 1| = |3x + 2|$.

$$\begin{aligned} |2x^2 + 2x + 1| &= |3x + 2|. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 + 2x + 1 = 3x + 2. \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 2x + 1 = -3x - 2. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 - x - 1 = 0 \text{.....(1)} \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \text{.....(2)} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1) \Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1. \\ 2) \Longrightarrow x_3 = -\frac{3}{2}, x_1 = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow S = \left\{ -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1 \right\} \text{.....(03points} \end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 2| - |x + 1| \leq 0$.

$$\begin{aligned} |x-2| - |x+1| &\leq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq |x+1| \Leftrightarrow |x-2|^2 \leq |x+1|^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -6x + 3 \leq 0 \\ &\Longrightarrow S = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{.....(02points)} \end{aligned}$$

- Exercice 03

Soient les deux nombres complexes $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

$z_1 = 1+\sqrt{3}i \Longrightarrow \begin{cases} \left|1+\sqrt{3}i\right| = 2 \\ Arg(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow z_1 = 1+\sqrt{3}i = 2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$.....(02point

$z_2 = 1-i \Longrightarrow \begin{cases} |1-i| = \sqrt{2} \\ Arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow z_1 = 1-i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.....(02point)

2. Calculer de deux manières leurs quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

Par la forme algèbrique:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})}{2}i$.....(01point)

Par la forme trigonométrique:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12}))$.....(01poin

3. En déduire $\sin(\frac{7\pi}{12})$ et $\cos(\frac{7\pi}{12})$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{2}+\frac{(1+\sqrt{3})}{2}i = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12})) \Longrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\ \sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ .....(02point)

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

$$2z^2 + 5iz - 2 = 0$$

$\Delta = -9 = (3i)^2 \neq 0 \Longrightarrow$l'équation admet deux solutions:

$$z_1 = \frac{-5i+3i}{4} = \frac{1}{2}i, z_2 = \frac{-5i-3i}{4} = -2i \text{.....(02point)}$$